# Analytische Lösung algebraischer Gleichungen dritten und vierten Grades

## Inhaltsverzeichnis



## 1 Einführung

In diesem Skript werden analytische Formeln für die Wurzeln der algebraischer Gleichungen 3ten und 4ten Grades in Radikalen vorgestellt. Diese Formeln sind besonders in den Fällen nützlich, wenn die Koeffizienten der Gleichungen von Parametern abhängen, und die Abhängigkeit der Wurzeln von diesen Parametern untersucht werden soll. Die Formeln werden mit den Herleitungen vorgestellt, d.h., es wird eigentlich *das Verfahren* zur Lösung dieser Gleichungen beschrieben. Es ist oft bequemer, für die zu lösende Gleichung diese Herleitung zu wiederholen, wobei in jedem Schritt die Zwischenformeln algebraisch vereinfacht und die Gleichheiten überprüft werden.

In diesem Abschnitt fassen wir die Grundkenntnisse über die algebraischen Gleichungen in einer komprimierten Form zusammen. Den Lesern, denen diese Theorie schon bekannt ist, empfehlen wir, direkt zu den Abschnitten 2 und 3 überzugehen.

Eine algebraische Gleichung des Grades $d$ ist eine Gleichung der Form

$$c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0, \tag{1}$$

wobei $x$ die Unbekannte und $c_d$, ..., $c_0$ von $x$ unabhängige reelle oder komplexe Koeffizienten sind ($c_d \neq 0$). Die linke Seite von (1) ist ein *Polynom* des Grades $d$:

$$P(x) = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Lösungen von (1), d.h. die Werte $x$, für die (1) erfüllt ist, heißen *Wurzeln von (1)* oder auch Wurzeln des Polynoms $P(x)$.

Da $c_d \neq 0$, kann (1) durch $c_d$ geteilt werden. Dann ergibt sich die Gleichung

$$x^d + c'_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c'_1 x + c'_0 = 0, \tag{2}$$

mit $c'_i = \frac{c_i}{c_d}$ $(i = d-1, \ldots, 1)$. Gleichung (2) hat genau die gleichen Wurzeln, wie (1), d.h. (1) und (2) sind äquivalent. Weiter unten werden wir ausschließlich die Gleichungen der Form (2) betrachten.

Ein triviales Beispiel von (2) ist die lineare Gleichung $x + C = 0$ (Gleichung ersten Grades), die eine einzelne Lösung $x = -C$ besitzt.

Ein wichtigeres Beispiel ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + Cx + D = 0, \tag{3}$$

die *im Allgemeinen* zwei Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - D} \tag{4}$$

hat. Gleichung (3) ist aus folgenden Gründen bemerkenswert:

1. Für bestimme $C$ und $D$, nämlich falls *die Diskriminante* $\Delta := C^2 - 4D < 0$, hat (3) keine Lösungen in den reellen Zahlen. Dann hat sie aber auf jeden Fall komplexe Lösungen. (In den komplexen Zahlen ist (4) immer wohldefiniert.) Dies gilt auch für die allgemeine Gleichung (2): Sie hat *immer* Lösungen in den komplexen Zahlen (Fundamentalsatz der Algebra). Diese Lösungen sind jedoch nicht unbedingt reell, auch wenn alle Koeffizienten der Gleichung reell sind. Deshalb muss man bei der Lösung solcher Gleichungen in der Regel die komplexe Arithmetik benutzen.

2. Für $C^2 - 4D = 0$ gilt $x_1 = x_2$, d.h. (3) hat im Wesentlichen eine Lösung. Es wird dann aber trotzdem gesagt, dass *(3) zwei Wurzeln hat* oder dass (3) *eine doppelte Wurzel* hat. Für Gleichung (2) eines beliebigen Grades $d$ gilt: (2) hat genau $d$ Wurzeln.

3. Es seien alle $c'_i$ in (2) reell. Ist $x_*$ eine Wurzel von (2), dann ist $\overline{x_*}$ (die zu $x_*$ konjugierte komplexe Zahl) auch eine Wurzel von (2). Im Fall von (3) sieht man dies sofort aus (4). Dafür hat eine Gleichung mit reellen Koeffizienten immer eine gerade Anzahl nicht-reeller Wurzeln. Sind z.B. $C$ und $D$ in (3) beide reell, dann sind $x_1$ und $x_2$ entweder beide reell oder beide rein komplex. Eine Gleichung dritten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Wurzel, da die Anzahl der nicht-reellen Wurzeln entweder 2 oder 0 sein muss.

Obwohl die Anzahl der Wurzeln sich einfach bestimmen lässt, ist die Auswertung der Wurzeln im Fall $d \geq 3$ eine deutlich schwierigere Aufgabe, als für (3). Man kann beweisen (Satz von Abel-Ruffini), dass Formeln, die die Lösungen einer *beliebigen* algebraischen Gleichung des Grades $d$ in Form der Radikale darstellen, nur für $d \leq 4$ existieren. Diese Formeln für $d = 3$ und $d = 4$ werden in den Abschnitten 2 und 3 vorgestellt.

**Bemerkung 1** *Es sei eine Wurzel $x_*$ von (2) bekannt. Man kann dann den Grad des Polynoms auf der linken Seite durch das Teilen durch $x - x_*$ reduzieren. Es sei $x_*$ nicht-reel. Falls alle Koeffizienten von (2) reell sind, ist $\overline{x_*} \neq x_*$ eine weitere Wurzel und man kann durch $(x - x_*)(x - \overline{x_*}) = x^2 - (2\,\mathbf{Re}\,x_*) \cdot x + |x_*|^2$ teilen, so dass alle arithmetischen Operationen nur mit reellen Zahlen durchgeführt werden.*

# 2 Gleichungen dritten Grades

In diesem Abschnitt leiten wir die Formel für die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{5}$$

her. Die Substitution $x = y - \frac{B}{3}$ wandelt (5) in die äquivalente Gleichung

$$y^3 + py + q = 0 \tag{6}$$

für $y$ um, wobei

$$p = C - \tfrac{1}{3}B^2, \qquad q = D + \tfrac{2}{27}B^3 - \tfrac{1}{3}BC.$$

Die Herleitung wird für (6) durchgefürt.

Wir führen statt $y$ zwei neue Unbekannten $u$ und $v$ ein und suchen nach einer Lösung $y_*$ von (6) der Form

$$y_* = u + v \tag{7}$$

unter der Bedingung

$$uv = -\frac{p}{3}. \tag{8}$$

Wir weisen darauf hin, dass komplexe Zahlen $u$ und $v$ mit (7) und (8) für jede Zahl $y_*$ existieren.

Nach dem Einsetzen von (7) in (6) bekommen wir

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \tag{9}$$

Dann gilt nach (9) und (8), dass $u^3 + v^3 + q = 0$, und wir erhalten für $u$ und $v$ das Gleichungssystem

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{10}$$

Aus (10) folgt, dass $u^3$ und $v^3$ Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{11}$$

sind, d.h.

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}, \\ v^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei

$$\Delta := -27q^2 - 4p^3 = -4C^3 + B^2C^2 - 4B^3D + 18BCD - 27D^2$$

die *Diskriminante der kubischen Gleichung* bezeichnet. Für die Wurzel $y_*$ von (6) erhalten wir also die Formel

$$y_* = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{13}$$

*(Cardanische Formel).* Die entsprechende Wurzel von (5) ist dann $x_* = y_* - \frac{B}{3}$.

Wie wir in Bemerkung 1 gesehen haben, reicht es, wenn man mittels (13) eine Wurzel $y_*$ von (6) findet und damit eine Wurzel $x_*$ von (5) bekommt. Dann kann man den Grad der Gleichung reduzieren und die restlichen zwei Wurzeln als Lösungen der dadurch entstehenden quadratischen Gleichung mit (4) berechnen. Aber Formel (13) liefert selber alle drei Wurzeln von (6). Dazu kann man mit (13) auch Werte von $y_*$ erhalten, die gar keine Lösungen von (6) sind.

Wir weisen darauf hin, dass alle oben vorgestellten Formeln die komplexe Arithmetik voraussetzen, und die Werte von $u$ und $v$ im Allgemeinen nicht-reell sind, auch wenn alle Koeffizienten und Wurzeln von (5) reell sind (siehe Beispiel 1 unten). Dabei hat jede komplexe Zahl immer drei verschiedene kubische Wurzeln. (Ist diese Zahl reell, so ist genau eine dieser Wurzeln auch reell.)

Zuerst einmal bedeutet dies, dass (8) und die zweite Gleichung in (10) nicht äquivalent sind. Ein Paar $(u, v)$ braucht (8) nicht zu erfüllen, wenn die zweite Gleichung in (10) für $(u^3, v^3)$ gilt, da $\frac{p}{3}$ nicht die einzige Wurzel von $\frac{p^3}{27}$ ist. Außerdem bedeuten die Radikale $\sqrt[3]{\ldots}$ in (13) jede der kubischen Wurzeln aus $u^3$ bzw. $v^3$. Werden nacheinander alle Werte dieser kubischen Wurzeln für die Radikale in (13) benutzt, bekommt man alle drei Lösungen von (6), sowie Werte von $y_*$, die (6) nicht genügen. Die letztgenannte Situation entsteht genau dann, wenn (8) für $u$ und $v$ nicht gilt. Die Werte der Radikale in (13) müssen also im Sinne von (8) konsistent sein.

Die Wahl der Werte der Radikale, d.h. der Paare $(u, v)$, in (13) ist also nicht offensichtlich. Wir betrachten im Detail den Fall der reellen Koeffizienten $B$, $C$ und $D$. Dann besitzt (5) mindestens eine reelle Wurzel (siehe Abschnitt 1). Die zwei anderen Wurzeln sind entweder beide reell oder beide rein komplex. Die Wahl von $u$ und $v$, sowie die Anzahl der reellen Wurzeln lassen sich nach dem Vorzeichen der Diskriminante $\Delta$ bestimmen:

1. Ist $\Delta > 0$, dann hat (5) drei verschiedene reelle Wurzeln. In diesem Fall sind die Lösungen $u^3$ und $v^3$ von (12) nicht-reell, dabei $v^3 = \overline{u^3}$. Für jede kubische Wurzel $u$ von $u^3$ kann dann im Paar $(u, v)$ der Wert $v = \overline{u}$ als die kubische Wurzel von $v^3$ gewählt werden. Dann ist das Produkt $uv = |u|^2$ eine reelle Zahl, d.h. das Paar $(u, v)$ genügt (8). Für jede kubische Wurzel $u$ von $u^3$ bekommen wir also nach (13) die reelle Lösung $x_* = u + \overline{u} - \frac{B}{3} = 2\,\mathbf{Re}\,u - \frac{B}{3}$ von (5), und somit alle drei Lösungen dieser Gleichung. Siehe Beispiel 1 unten.

2. Bei $\Delta < 0$ hat (5) eine (einfache) reelle Wurzel und zwei nicht-reelle (konjugierte) Wurzeln. Die Lösungen $u^3$ und $v^3$ sind in diesem Fall reell. Deshalb

haben sie reelle kubische Wurzeln $u$ und $v$, und dieses Paar $(u, v)$ genügt (8). Setzen wir dieses Paar in (13) ein, so reicht die reelle Arithmetik für die Auswertung von $y_*$ aus. Damit erhalten wir die reelle Wurzel $x_*$ von (5). Um die zwei anderen (nicht-reellen) Wurzeln zu bekommen, kann der Grad der Gleichung reduziert werden: Siehe Bemerkung 1. Dieser Fall wird im Beispiel 2 vorgestellt.

3. Wenn $\Delta = 0$ ist, sind alle Wurzeln von (5) reell. Dabei sind mindestens zwei dieser Wurzeln gleich. Denn die Resultante des Polynoms in (6) und dessen Ableitung ist $27q^2 + 4p^3 = -\Delta = 0$. Alle drei Wurzeln sind jedoch nur bei $p = q = 0$ gleich, da die linke Seite von (6) nur in diesem Fall ein vollständiger Kubus ist. Diese dreifache Wurzel ist dann $x_* = -\frac{1}{3}B$. Sonst hat (5) eine einfache und eine doppelte Wurzel. Dabei hat (11) die Lösung $u^3 = v^3 = -\frac{q}{2}$ mit der reellen kubischen Wurzel $u = v = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, die (8) genügt. Die einfache Wurzel von (5) ist dann $x_* = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} - \frac{B}{3}$. Um die doppelte Wurzel von (5) zu finden, muss man entweder die nicht-reellen kubischen Wurzeln $u$ und $v = \overline{u}$ von $u^3 = v^3$ nehmen, oder den Grad der Gleichung, wie in Bemerkung 1 beschrieben, reduzieren. Eine Gleichung mit $\Delta = 0$ wird im Beispiel 3 betrachtet.

**Beispiel 1**

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0. \tag{14}$$

*Nach Substitution* $y = x - \frac{11}{3}$ *erhalten wir*

$$y^3 - \tfrac{13}{3}y - \tfrac{70}{27} = 0,$$

*d.h.* $p = -\frac{13}{3}$ *und* $q = -\frac{70}{27}$. *Die Diskriminante* $\Delta = 144$ *ist positiv. Dann sind*

$$u^3 = \tfrac{35}{27} + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}i, \qquad v^3 = \tfrac{35}{27} - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}i$$

*nicht-reelle konjugierte Zahlen. Die Zahl* $u^3$ *besitzt die folgenden kubischen Wurzeln:*

$$u_1 = -\tfrac{5}{6} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad u_2 = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}i, \quad u_3 = \tfrac{7}{6} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}i.$$

*Die entsprechenden kubischen Wurzeln von* $v^3$ *sind*

$$v_1 = \overline{u_0} = -\tfrac{5}{6} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad v_2 = \overline{u_1} = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}i, \quad v_3 = \overline{u_2} = \tfrac{7}{6} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}i.$$

*Daraus erhalten wir* $y_1 = u_1 + v_1 = -\frac{5}{3}$, $y_2 = u_2 + v_2 = -\frac{2}{3}$, $y_3 = u_3 + v_3 = \frac{7}{3}$ *und berechnen die drei Wurzeln von (14):*

$$x_1 = y_1 + \tfrac{11}{3} = 2, \quad x_2 = y_2 + \tfrac{11}{3} = 3, \quad x_3 = y_3 + \tfrac{11}{3} = 6.$$

*Wir weisen dabei darauf hin, dass das Paar* $(u, v) = (u_1, v_2)$ *Gleichung (10) auch genügt. Es genügt aber (8) nicht. Dafür ist* $x_* = u_1 + v_2 + \frac{11}{3} = \frac{5}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6}i$ *keine Wurzel von (14).*

**Beispiel 2**

$$x^3 + x^2 - 2 = 0. \tag{15}$$

*Die Substitution* $x = y - \frac{1}{3}$ *führt (15) in*

$$y^3 - \tfrac{1}{3}y - \tfrac{52}{27} = 0$$

*über. Dabei sind* $p = -\frac{1}{3}$, $q = -\frac{52}{27}$ *und* $\Delta = -100 < 0$, *d.h.*

$$u^3 = \tfrac{26}{27} + \tfrac{5\sqrt{3}}{9}, \qquad v^3 = \tfrac{26}{27} - \tfrac{5\sqrt{3}}{9}$$

*sind reelle Zahlen. Als u und v nehmen wir dann die reellen kubischen Wurzeln von* $u^3$ *und* $v^3$ *und führen die arithmetischen Operationen in (13) in reellen Zahlen aus. Damit berechnen wir*

$$y_1 = \sqrt[3]{\tfrac{26}{27} + \tfrac{5\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{\tfrac{26}{27} - \tfrac{5\sqrt{3}}{9}} = \tfrac{4}{3}$$

*und finden die reelle Wurzel von (15):*

$$x_1 = y_1 - \tfrac{1}{3} = 1.$$

*Das Polynom auf der linken Seite von (15) lässt sich also in zwei Faktoren*

$$x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2).$$

*zerlegen. Daraus finden wir die zwei restlichen Wurzeln von (15):* $x_{2,3} = -1 \pm i$.

*Gleichung (15) kann in die Form (6) auch mit der nicht-linearen Substitution* $x = 1/t$ *transformiert werden. Dann erhält man die kubische Gleichung* $t^3 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$.

**Beispiel 3**

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0. \tag{16}$$

*Mit der Substitution* $x = y + \frac{8}{3}$ *wird (16) in*

$$y^3 - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{27} = 0$$

*umgewandelt, wobei* $p = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{27}$. *Die Diskriminante* $\Delta$ *dieser Gleichung ist 0. Das bedeutet, dass (16) eine einfache und eine doppelte Wurzel hat, wobei alle Wurzeln reell sind. Die einfache Wurzel lässt sich nach (13) mit reeller Arithmetik berechnen:*

$$x_1 = -2\sqrt[3]{\tfrac{q}{2}} + \tfrac{8}{3} = 2$$

*Um die doppelte Wurzel zu finden, kann man das Polynom auf der linken Seite von (16) durch* $x - 2$ *teilen. Man kann auch anders vorgehen: Statt des reellen Wertes* $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ *betrachten wir die nicht-reellen kubischen Wurzeln aus* $\frac{q}{2} = \frac{1}{27}$. *Das sind die konjugierten komplexen Zahlen* $u = \frac{1}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{6}i$ *und* $v = \frac{1}{6} - \frac{6\sqrt{3}}{6}i$. *Die zu findende Wurzel von (16) ist dann*

$$x_{2,3} = u + v + \tfrac{8}{3} = 3.$$

# 3 Gleichungen vierten Grades

In diesem Abschnitt betrachten wir die Gleichung

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0. \tag{17}$$

Um ihre Lösungen zu finden, führen wir die Substitution $x = y - \frac{A}{4}$ aus und wandeln (17) damit in die äquivalente Form

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{18}$$

um, wobei

$$p = B - \tfrac{3}{8}A^2, \quad q = C + \tfrac{1}{8}A^3 - \tfrac{1}{2}AB, \quad r = D - \tfrac{3}{256}A^4 - \tfrac{1}{4}AC + \tfrac{1}{16}A^2B.$$

Für jede Zahl $z$ ist (18) äquivalent zu

$$(y^2 + z)^2 - ((2z - p)y^2 - qy - r + z^2) = 0. \tag{19}$$

Um (18) zu lösen, bestimmen wir $z =: z_*$ so, dass das Polynom $Q(y) = (2z-p)y^2 - qy - r + z^2$ ein volles Quadrat ist, d.h. $Q(y) = (2z_* - p)\left(y - \frac{q}{2(2z_*-p)}\right)^2$. Damit wird (19) in

$$(y^2 + z_*)^2 - (2z_* - p)\left(y - \frac{q}{2(2z_* - p)}\right)^2 = 0 \tag{20}$$

überführt, d.h., in die Differenz von zwei Quadraten. Aus (20) folgt, dass (18) in zwei unabhängige quadratische Gleichungen

$$y^2 + z_* - \sqrt{2z_* - p}\left(y - \frac{q}{2(2z_* - p)}\right) = 0 \tag{21}$$

und

$$y^2 + z_* + \sqrt{2z_* - p}\left(y - \frac{q}{2(2z_* - p)}\right) = 0 \tag{22}$$

zerfällt. Die Lösungen von (21) und (22) sind alle Wurzeln von (18). Aus diesen Wurzeln berechnen wir die Wurzeln von (17).

Da $Q(y)$ ein quadratisches Polynom in $y$ ist, ist es genau dann ein volles Quadrat, wenn seine Diskriminante gleich 0 ist:

$$\frac{q^2}{4} - (2z - p)(z^2 - r) = 0. \tag{23}$$

Jede Lösung $z$ von (23) kann als $z_*$ benutzt werden. D.h., $z_*$ wird als eine Wurzel der kubischen Gleichung (23) berechnet.

Insgesamt besteht also die Lösung von (17) aus drei Phasen:

1. Gleichung (17) wird durch die Substitution in (18) überführt.

2. Die kubische Gleichung (23) wird für $z$ gelöst und damit $z_*$ gefunden. (Siehe Abschnitt 2.)

3. Es werden die quadratischen Gleichungen (21) und (22) gelöst und aus deren Lösungen die Wurzeln von (17) berechnet.

Es seien $A$, $B$, $C$ und $D$ reell. Dann hat die kubische Gleichung (23) auch reelle Koeffizienten, d.h. (siehe Abschnitt 2) sie hat mindestens eine reelle Wurzel $z_*$. Wird dieses $z_*$ in (21–22) benutzt, bekommen wir zwei quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Wir weisen darauf hin (siehe Abschitt 1), dass (17) in diesem Fall entweder vier oder zwei oder gar keine reellen Wurzeln hat. Das entspricht den Situationen, dass entweder beide Gleichungen (21–22) reelle Wurzeln haben, oder nur eine, oder keine davon.

**Beispiel 4**

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = 0. \tag{24}$$

*Nach der Substitution* $x = y + \frac{3}{4}$ *erhalten wir*

$$y^4 - \tfrac{43}{8}y^2 - \tfrac{35}{8}y + \tfrac{2925}{256} = 0,$$

*wobei*

$$p = -\tfrac{43}{8}, \qquad q = -\tfrac{35}{8}, \qquad r = \tfrac{2925}{256}.$$

*Die kubische Gleichung (23) hat hier die Form*

$$-2z^3 - \tfrac{43}{8}z^2 + \tfrac{2925}{128}z + \tfrac{135575}{2048} = 0. \tag{25}$$

*(25) besitzt die reelle Wurzel* $z_* = \frac{55}{16}$ *(die zwei anderen Wurzeln sind nicht-reell). Die Substitution von* $z_*$ *in (21–22) liefert die Gleichungen*

$$y^2 - \tfrac{7}{2}y + \tfrac{45}{16} = 0 \quad \textit{und} \quad y^2 + \tfrac{7}{2}y + \tfrac{65}{16} = 0.$$

*Die erste davon hat die Wurzeln* $y_1 = \frac{5}{4}$ *und* $y_2 = \frac{9}{4}$*, die zweite* $y_3 = -\frac{7}{4} + i$ *und* $y_4 = -\frac{7}{4} - i$*. Daraus berechnen wir durch* $x = y + \frac{3}{4}$ *die Wurzeln von (24):*

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_{3,4} = -1 \pm i.$$